Modelo Fuzzy de determinación del valor unitario de edificación destinada a vivienda con fines catastrales

Juan Pedro Azcona
Agrimensor. Jefe División Valuaciones Especiales
Gerencia de Catastro. Agencia de Recaudación Tributaria
Provincia de Río Negro, Argentina

La incertidumbre y su tratamiento en los procesos de valoración catastral

El concepto de información está íntimamente ligado al concepto de incertidumbre. El aspecto fundamental de esta vinculación es que la incertidumbre involucrada en alguna situación problemática es el resultado de alguna deficiencia en la información.

La información, concerniente al modelo dentro del cual la situación es conceptualizada, puede ser incompleta, imprecisa, fragmentaria, no totalmente confiable, vaga, contradictoria, o deficiente en algún otro sentido.

En general, estas deficiencias en la información pueden resultar en diferentes tipos de incertidumbre.

La incertidumbre, en alguna de sus formas, constituye un fenómeno que se presenta en todo proceso de valoración, en particular, cuando se trata de valuaciones inmobiliarias masivas o catastrales.

La información disponible del mercado inmobiliario presenta importantes deficiencias derivadas de las características propias de ese mercado: bienes heterogéneos, problemas de transparencia en el conocimiento de los precios, datos incompletos, información insuficiente sobre determinados bienes y zonas, entre otras.

Los modelos de valoración tradicionales procuran superar las mencionadas deficiencias utilizando coeficientes correctores (también llamados factores de ponderación o asimiladores), que constituyen factores que transforman numéricamente el valor del antecedente en el valor del bien a valuar. Tales coeficientes o asimiladores implican la ponderación de circunstancias y/o elementos de valoración de la más variada especie, como por ejemplo, la forma y dimensiones del terreno, la ubicación del inmueble, la dotación de servicios públicos de infraestructura, la antigüedad y estado de conservación del edificio, la topografía del terreno, entre otros.

La experiencia acumulada nos muestra que el cálculo de dichos coeficientes o asimiladores se ha cumplido de modo poco satisfactorio. Ello debido a dos causas principales:

1) la mayoría de los casos carece de un cálculo fundado sobre adecuadas bases científicas y,
2) la vigencia temporal de los coeficientes es limitada (deberían controlarse periódicamente con una frecuencia variable según el asimilador).

Por otra parte, muchos coeficientes, por su naturaleza, responden a circunstancias propias de la realidad económica e inmobiliaria local, es decir, no todos los asimiladores o coeficientes correctores pueden universalizarse en su aplicación.

En relación al punto 1) cabe destacar que la definición de asimiladores sobre bases científicas se ha apoyado en la proposición de modelos probabilísticos para manejar situaciones tales como la falta de información o la imposibilidad de obtener datos precisos; es decir, se asume implícitamente que la incertidumbre es consecuencia del azar.

Sin embargo, en el problema de determinación de asimiladores o coeficientes correctores no sólo participan eventos de tipo probabilístico sino que se suman ambigüedades de otro origen. Y es en este caso donde la Lógica Difusa (Fuzzy Logic), como parte de los modelos de valoración automatizada, es una herramienta especialmente adecuada, cuando en la formulación del proceso están presentes predicados vagos o situaciones inciertas que, en el caso de valuaciones catastrales, se ven incrementadas sensiblemente.

Los métodos de valoración automatizada se han desarrollado en los últimos años y se diferencian de los métodos tradicionales en que se basan esencialmente en un procedimiento sistemático y en la utilización de técnicas matemáticas que le otorgan a la valoración obtenida un carácter más científico y más objetivo y, sobre todo, permite una producción de valores muy superior a la de las valoraciones tradicionales.

Las etapas para la construcción de un modelo de valoración automatizada son las siguientes:

a) Obtención y tratamiento de la información de mercado.
b) Elaboración del modelo matemático.
c) Comprobación y ajuste del modelo.
d) Aplicación del modelo.

Lógica Difusa o Fuzzy. Introducción

Exponiendo el concepto de una forma sencilla podemos decir que la Lógica Difusa se ocupa de procesar información imprecisa para obtener resultados. Tiene la característica de que reproduce bastante bien el razonamiento habitual tal y como lo expresamos en nuestro lenguaje.

En el lenguaje habitual la mayoría de las proposiciones son imprecisas: “este hombre es bastante bajo”, “estoy muy cerca”, “he tardado mucho”. No manejamos una cuantificación exacta para determinar cuándo una persona es baja, o cuándo una distancia es corta, o cuándo el tiempo transcurrido es breve.

Sin embargo esta forma de expresarse es muy práctica, ya que es muy ágil y con ella entendemos por lo general muy bien, sin tener que realizar continuas cuantificaciones de los términos que empleamos, que serían muy costosas y en muchos casos irrealizables.

En la Lógica Clásica o binaria las proposiciones solo pueden ser verdaderas o falsas, mientras que en la Lógica Difusa hay una gradación entre lo verdadero y lo falso.

Si bien en el pasado algunos filósofos y científicos manejaron la idea de una gradación entre lo verdadero y lo falso, la Lógica Difusa como tal tiene su origen en la pasada década de los años 60 en la Universidad de California de Berkeley, donde fue enunciada por el prestigioso ingeniero Lotfy A. Zadeh[1].

Desde entonces ha tenido un importante desarrollo y se aplica en muchos campos tales como informática, electrodomésticos, cámaras de fotos, reconocimiento de escritura, interpretación de imágenes satelitales, entre otros.

Dentro de las distintas modalidades de Inteligencia Artificial, la Lógica Difusa es de las más recientes, y posiblemente es a la que le queda un desarrollo más importante por realizar. La Lógica Difusa proporciona la herramienta para la modelización de condiciones inherentemente imprecisas y sus técnicas, en forma de razonamiento aproximado, proporcionan apoyo a las decisiones y sistemas expertos con capacidades de razonamiento poderosos.

Hasta el momento sólo hay desarrollos incipientes y, a nivel de laboratorio, que apliquen la Lógica Difusa a la valoración inmobiliaria. Sin embargo, las posibilidades están dadas para el desarrollo de aplicaciones prácticas de este tipo, ya que también cuando nos referimos a los inmuebles utilizamos términos imprecisos tales como: esta casa es "bastante nueva" o es "bastante grande", o este terreno está "bien ubicado" o es "casi regular", o este local comercial es "muy céntrico".

Las ventajas y oportunidades de la Lógica Difusa devienen del hecho que permite expresar juicios vagos o imprecisos en términos formales debido a que nuestro método de razonamiento no está basado, o sólo raramente, en una lógica dual o bivalente.

Nuestro razonamiento no se basa, en otras palabras, en una lógica que permite solamente dar respuestas posibles tales como sí/no, blanco/negro o 0/1 sino como, mejor dicho, Zadeh define como Lógica Difusa: *"Los elementos claves en el razonamiento humano no son números, sino etiquetas de conjuntos difusos, esto es, clases de objetos en los que la transición de pertenencia o no-pertenencia es más bien gradual que abrupta. La lógica que subyace el razonamiento humano no es la tradicional lógica bivaluada e, incluso, la multivariada, sino una lógica con verdades difusas, conectores difusos, y reglas difusas de inferencia. En nuestra opinión, es difusa, y aún no se entiende bien, la lógica que juega un papel fundamental en lo que, bien puede ser uno de los hechos más importantes del pensamiento humano, es decir, la capacidad de síntesis de la información, para extraer de las colecciones de masas de datos que inciden sobre el cerebro humano, sólo aquellas subcolecciones que son relevantes para el desempeño de la tarea en cuestión"*.

Conjuntos Difusos y funciones de pertenencia

Zadeh introdujo el término Lógica Difusa en su obra fundamental "Fuzzy sets",

[1] Lotfi Asker Zadeh, nació el 04 de febrero 1921. Matemático, ingeniero eléctrico, informático y profesor azerbaiyano de la Universidad de Berkeley. Introdujo en 1965 la teoría de conjuntos difusos o lógica difusa. Se le considera asimismo el padre de la teoría de la posibilidad.

Por sus contribuciones en este campo ha recibido varios galardones, entre los que destaca la Medalla Richard W. Hamming en 1992 y doctorados honoris causa de varias instituciones del mundo, entre ellas la Universidad de Oviedo (1995), la Universidad de Granada (1996) y la Universidad Politécnica de Madrid (2007).

En 2013 se le otorga el Premio Fundación BBVA Fronteras del Conocimiento por la invención y el desarrollo de la lógica difusa.

que describe las matemáticas de la teoría de conjuntos difusos (1965).

Un conjunto difuso es una extensión de un conjunto clásico. Los conjuntos clásicos (crisp) sólo permiten la plena pertenencia o no pertenencia, mientras que los conjuntos difusos permiten una pertenencia parcial. En un conjunto clásico, la pertenencia o no pertenencia del elemento x en un conjunto A está descripto por una función característica donde $\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\mu_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

La teoría de conjuntos difusos extiende este concepto al definir la pertenencia parcial. Un conjunto difuso A en un universo del discurso U se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo [0,1].

Los conjuntos difusos representan etiquetas lingüísticas de sentido común como *lento*, *rápido*, *pequeño*, *grande*, *pesado*, *bajo*, *medio*, *alto*, *nuevo*, *viejo*, *etc*. Un elemento dado puede ser miembro de más de un conjunto difuso a la vez.

Un conjunto difuso A en U puede ser representado por un conjunto de pares ordenados. Cada par consiste en un elemento genérico x y su grado de pertenencia; es decir $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$, x es denominado un valor base si $\mu_A(x)>0$.

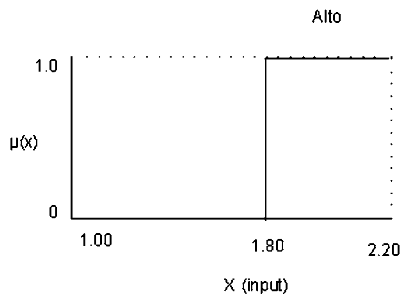
Una función de pertenencia es esencialmente una curva que define la forma en que a cada punto del espacio entrada se le asigna un valor de pertenencia (grado de pertenencia) entre 0 y 1. A modo de ejemplo, consideremos el conjunto difuso *Alto* definido en el universo del discurso de alturas desde 1,00 m a 2,20 m. En un conjunto clásico (crisp) todas las personas con una altura de 1,80 m o más son consideradas *altas*, y todas aquellas personas cuya altura es inferior a 1,80 m se consideran *no altas*. La función de pertenencia del conjunto clásico Altura responde al gráfico 1.

La función de pertenencia correspondiente al conjunto difuso "Alto" puede responder a un gráfico como el gráfico 2.

La curva define la transición desde *no alto* y muestra el grado de pertenencia para una medida de altura dada.

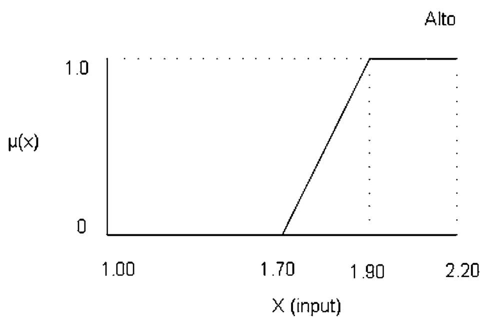
Podemos extender este concepto a varios conjuntos. Si tenemos en cuenta el universo del discurso mencionado y los términos *Bajo*, *Medio* y *Alto*, la representación de las funciones de pertenencia de estos conjuntos resulta en el gráfico 3.

Gráfico 1



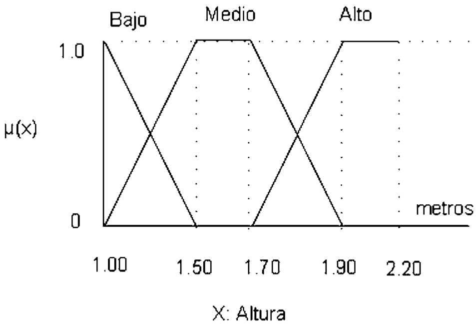
Función de pertenencia clásica o crisp ALTURA

Gráfico 2



Función de pertenencia del conjunto difuso ALTO

Gráfico 3



Funciones de pertenencia correspondiente a etiquetas lingüísticas de la variable difusa ALTURA

Operaciones con conjuntos difusos

Las operaciones de conjuntos difusos son análogas a las operaciones de conjuntos clásicos. Lo importante en la definición de los operadores lógicos de conjuntos difusos es que tales operaciones deben mantener valores difusos entre 0 y 1, y sostener los valores extremos 1 (verdadero) y 0 (falso).

Las operaciones de conjuntos clásicos más elementales son *unión*, *intersección* y *complemento*, que corresponden esencialmente a los operadores O, Y y NO, respectivamente.

Sean A y B dos subconjuntos de U. La unión de A y B, denotado $A \cup B$, contiene todos los elementos de A o B, es decir, $\mu_{A \cup B}(x) = 1$ si $x \in A$ y $x \in B$.

La intersección de A y B, denotado $A \cap B$, contiene todos los elementos que son simultáneamente de A y B; es decir, $\mu_{A \cap B}(x) = 1$ si $x \in A$ y $x \in B$.

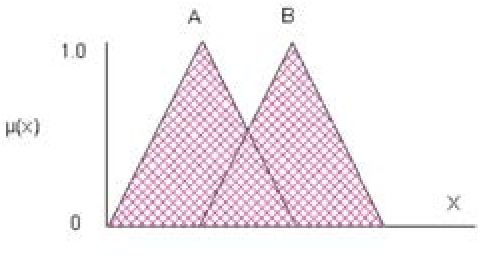
El complemento de A es denotado por $\bar{A}$, y contiene todos los elementos que no son de A; es decir, $\mu_{\bar{A}}(x) = 1$ si $x \notin A$ y $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$ si $x \in A$.

En la Lógica Difusa, la verdad de cualquier manifestación es una cuestión de grado. Con el fin de definir los operadores de lógica difusa, tenemos que encontrar los correspondientes operadores que preservan los resultados del uso de los operadores O, Y y NO. La respuesta son las operaciones *mín*, *máx* y *complemento*. Estos operadores se definen, respectivamente, como:

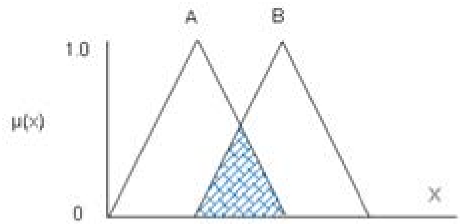
$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}\,[\mu_A(x);\ \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}\,[\mu_A(x);\ \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

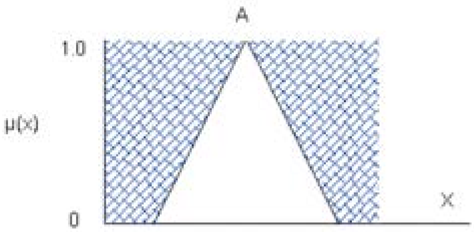
$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Unión



Intersección



Complemento

Números Difusos

Entre los subconjuntos difusos del conjunto R de los números reales distinguimos aquellos que podemos asociar a un número real. A estos conjuntos A se los denomina números difusos. Previo a su definición repasaremos los conceptos de soporte, altura y convexidad de un conjunto difuso:

Soporte de A: $sop(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$

Altura de A: $alt(A) = \max_x \mu_A(x)$

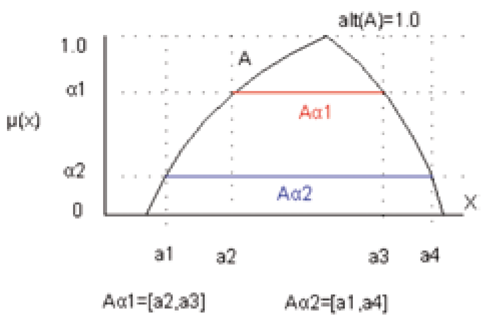
Decimos que A es normal si existe un $x \in X : \mu_A(x) = 1$. En nuestro caso, consideraremos conjuntos difusos normales.

El nivel α de A es el conjunto (clásico) $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Se dice que A es convexo si $A \subseteq X \subseteq R$ y $x_1 \leq x \leq x_2$ implica $\mu_A(x) \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2)$.

Es natural que los números difusos sean conjuntos difusos normales, ya que si aproxima al número real r, $\mu_A(r)$ debiera ser 1; además todos los α de A son intervalos cerrados (o segmentos) de R, lo que facilita la aritmética de éstos números. De este hecho resulta que A es un conjunto difuso convexo.

Conjunto Difuso Normal y Convexo



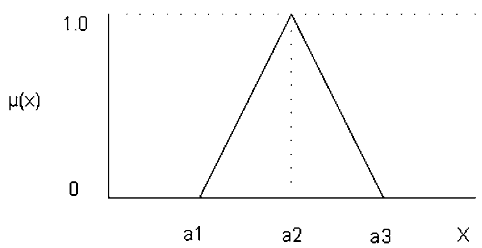
En suma, un número difuso es un subconjunto difuso de R, normal y tal que todos sus niveles α son segmentos.

La gráfica de un número difuso puede adoptar diversas formas tales como triangular, trapezoidal, en forma de campana gaussiana, entre otras. La triangular es la forma más común y sencilla de representar un número difuso A, el que queda determinado por una terna (a_1, a_2, a_3), siendo definida su función de pertenencia μ_A por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x < a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 < x < a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases}$$

El $[a_1, a_3]$ suele llamarse el intervalo de confianza del número difuso triangular (a_1, a_2, a_3).

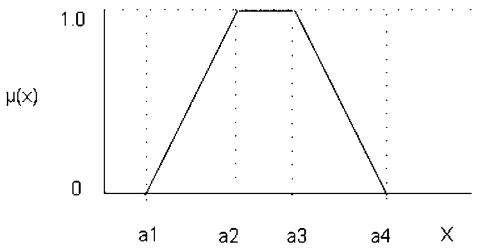
Para operar con números difusos triangulares se recurre a los niveles α, en este caso llamados intervalos de confianza de nivel α: $\lfloor a_1^\alpha, a_3^\alpha \rfloor$.



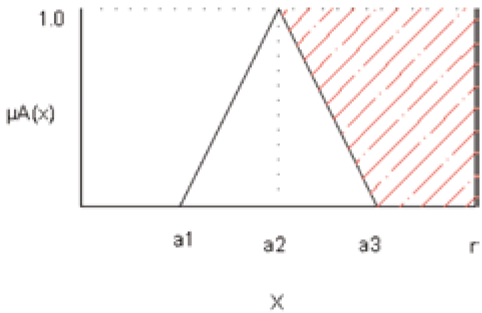
Número Difuso Triangular

Otra forma bastante usual es la trapezoidal, la que depende de cuatro parámetros y la función de pertenencia correspondiente de un número difuso A queda definida por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 < x < a_4 \\ 0 & x \geq a_4 \end{cases}$$



Número Difuso Trapezoidal



Muchas aplicaciones exigen definir una relación de orden clásica entre un conjunto de números difusos. Esencialmente, la idea es definir una "distancia" a un número difuso M que sea mayor (o menor) que todos ellos; entonces, dado un número difuso triangular $A = (a_1, a_2, a_3)$, y $r \geq a_3$, se definen:

Distancia a izquierda de A a r:

$$D_i(A,r) = r - \frac{a_1 + a_2}{2}$$

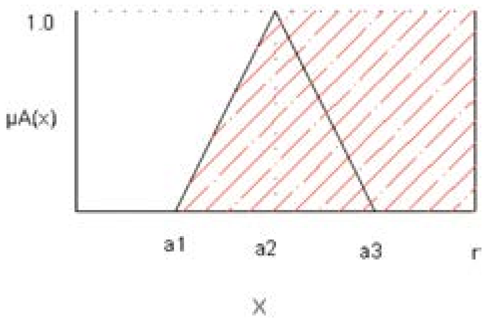
Distancia a derecha de A a r:

$$D_d(A,r) = r - \frac{a_2 + a_3}{2}$$

Distancia de A a r:

$$D(A,r) = D_i(A,r) + D_d(a,r) = 2 \cdot r - \frac{a_1 + 2 \cdot a_2 + a_3}{2}$$

Se verifica fácilmente que las distancias a izquierda y derecha son iguales, respectivamente, a las áreas de los trapecios que se indican en las gráficas.



Variables lingüísticas

Se denomina variable lingüística a una variable cuyos valores pueden expresarse en términos del lenguaje natural. Cada unos de estos términos se conoce como etiqueta o restricción lingüística y se representa por medio de un conjunto difuso definido sobre el universo del discurso de la variable. Una variable lingüística *X* en el universo del discurso *U* se caracteriza por $T(x)=T^1 + T^2 + \ldots + T^k$[2] y $\mu_A(x)=\{\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^k\}$, donde $T(x)$ es el conjunto de las etiquetas o restricciones de *X*, con cada T^i siendo un número difuso con función de pertenencia μ^i, definido en *U*. Por ejemplo, si *X* indica la *Altura*, luego $T(x)$ puede referirse a conjuntos como *Bajo*, *Medio*, o *Alto*, es decir, *T*(*Altura*) = *Bajo* + *Medio* + *Alto*. En el caso de la variable lingüística *Altura*, la variable numérica base se mide en metros y sus valores pertenecen al intervalo dado [1.00,2.20].

Sistemas Difusos o Fuzzy

Un sistema estático o dinámico que hace uso de conjuntos difusos o lógica difusa y del correspondiente marco matemático se llama un sistema difuso.

[2] + es usado para denotar la unión en vez de la suma aritmética.

Hay una serie de maneras en los que los conjuntos difusos pueden participar en un sistema, tales como:

— *En la descripción del sistema:* un sistema puede ser definido, por ejemplo, como una colección de reglas SI-ENTONCES con predicados difusos, o como una relación difusa. Un ejemplo de una regla difusa describiendo la relación entre la potencia de calefacción y la tendencia de temperatura en una habitación puede ser:

SI la *potencia de calefacción* es *alta* **ENTONCES** la *temperatura aumentará rápido*.

— *En la especificación de los parámetros del sistema:* el sistema puede ser definido por una ecuación algebraica o diferencial, en el que los parámetros son números difusos en lugar de números reales. A modo de ejemplo, consideremos la ecuación $y = \bar{3} \cdot x_1 + \bar{5} \cdot x_2$ donde $\bar{3}$ y $\bar{5}$ son números difusos “próximo a 3” y “próximo a 5”, respectivamente, definidos por una función de pertenencia. Los números difusos expresan la incertidumbre en los valores de los parámetros.

— *Las variables de entrada y salida de un sistema pueden ser conjuntos difusos:* Las entradas difusas pueden ser las lecturas de sensores no confiables (datos ruidosos) o cantidades relacionadas con la percepción humana, como la comodidad, la belleza, etc. El sistema difuso puede procesar esa información, a diferencia de los sistemas convencionales.

Un sistema difuso puede tener simultáneamente varios de los atributos anteriores.

El más común de los sistemas difusos es el basado en las reglas SI-ENTONCES. En este trabajo nos centraremos en este tipo de sistemas.

Los sistemas difusos pueden servir para diferentes propósitos, tales como la modelización, análisis de datos, predicción o control.

A lo largo de este artículo, un sistema basado en reglas difusas lo denominaremos, para mayor simplicidad, como modelo difuso o fuzzy.

La relevancia práctica de los modelos difusos puede resumirse de la siguiente manera:

Conocimiento impreciso o incompleto de los sistemas. La teoría convencional de sistemas se basa en modelos matemáticos nítidos, como ecuaciones algebraicas, diferenciales o en diferencias. Para algunos sistemas, tales como los electromecánicos, se pueden obtener modelos matemáticos. Esto es porque las leyes físicas que rigen los sistemas son bien conocidas. Pero para un gran número de problemas prácticos, la reunión de un grado aceptable de conocimientos necesarios para la modelización es un proceso dificultoso, consume tiempo y se vuelve una tarea costosa y, en ciertos casos, imposible. En la mayoría de los sistemas, los fenómenos subyacentes se entienden sólo parcialmente y modelos matemáticos nítidos no pueden derivarse o son demasiado complejos para ser útiles. Ejemplos de tales sistemas se pueden encontrar en las industrias químicas y alimenticias, biotecnología, ecología, finanzas, economía, sociología, etc. Una parte significativa de la información acerca de estos sistemas está disponible como conocimiento de personas expertas, operadores de procesos y diseñadores. Este conocimiento puede ser vago e incierto para ser expresado por funciones matemáticas. Sin embargo, es posible, a menudo, describir el funcionamiento de los sistemas por medio del lenguaje natural en forma de reglas SI-ENTONCES. Sistemas basados en reglas difusas se pueden utilizar como modelos fundados en el conocimiento construido a partir del proporcionado por expertos en el campo de interés determinado.

Procesamiento adecuado de la información imprecisa. El cálculo numérico sólo tiene sentido cuando los parámetros y datos de entrada son conocidos con precisión. Como éste, a menudo, no es el caso, es necesario un marco de modelización que pueda procesar adecuadamente no sólo los datos sino también la incertidumbre asociada. El enfoque estocástico es una forma tradicional de hacer frente a la incertidumbre. Sin embargo, se reconoce que no todos los tipos de incertidumbre pueden ser tratados con el marco estocástico. Se han propuesto varios enfoques alternativos. La teoría de conjuntos y lógica difusa es uno de ellos.

Transparencia (caja gris) del modelo e identificación. Identificación de los sistemas dinámicos a partir de medidas de ENTRADA-SALIDA es un tema importante de investigación científica con una amplia gama de aplicaciones prácticas. Muchos sistemas del mundo real son inherentemente no lineales y no pueden ser representadas por modelos lineales utilizados en la identificación del sistema convencional. Recientemente, hay un fuerte enfoque en el desarrollo de métodos para la identificación de sistemas no lineales a partir de datos medidos. Las redes neuronales artificiales y sistemas difusos son funciones matemáticas flexibles que pueden aproximar otras funciones o sólo datos (medidas) con una precisión deseada. Esta propiedad se llama función de aproximación general.

En comparación con otras técnicas de aproximación como las redes neuronales artificiales, los sistemas difusos proporcionan una representación más transparente del sistema bajo estudio, que se debe principalmente a la posible interpretación lingüística en la forma de reglas. La estructura lógica de las reglas facilita la comprensión y el análisis del modelo de una manera semi-cualitativa, cerca de la forma en que los humanos razonar sobre el mundo real.

Relaciones difusas SI-ENTONCES

Los sistemas de inferencia difusos consisten en las reglas SI-ENTONCES que especifican una relación entre las entradas y la salida de conjuntos difusos.

Las relaciones difusas presentan un grado de presencia o ausencia de asociación o interacción entre elementos de dos o más conjuntos.

Sean U y V dos universos del discurso. Una relación difusa $R(U, V)$ es un conjunto en el espacio producto $U \times V$[3] y se caracteriza por la función $\mu_R(x, y) \in [0,1]$.

La Lógica Difusa utiliza nociones de la Lógica Clásica. Conceptos de la lógica clásica pueden extenderse a la lógica difusa mediante la sustitución de los valores 0 o 1 con los valores de pertenencia difusa.

Una regla difusa simple asume la forma "SI x es A, ENTONCES y es B", donde $x \in U$ y $y \in V$, y tiene una función de pertenencia $\mu_{A \to B}(x, y)$, donde $\mu_{A \to B}(x, y) \in [0,1]$.

La parte **SI** de la regla, "x es A", se denomina el **antecedente o premisa**, mientras que la parte **ENTONCES**, "y es B", se denomina **consecuente o conclusión**.

La interpretación de una regla SI-ENTONCES implica dos pasos distintos. El primer paso es evaluar el antecedente, que implica fuzzificar la entrada y la aplicación de todos los operadores difusos necesarios. El segundo paso es la implicación, aplicando el resultado del antecedente al consecuente, la cual evalúa esencialmente la función de pertenencia $\mu_{A \to B}(x, y)$.

En la lógica clásica puede observarse que una regla se dispara si la premisa es exactamente la misma que el antecedente de la regla, y el resultado de tal activación de la regla es consecuente real de la misma. En la Lógica Difusa, una regla se dispara siempre que hay un grado distinto de cero de similitud entre la premisa y el antecedente de la regla.

Como las relaciones difusas son en sí mismas un conjunto difuso en el espacio

[3] El producto cartesiano es un concepto muy importante que se extiende hacia la Lógica Difusa. Todos los sistemas difusos tratan con más de un universo del discurso, por lo cual sus conjuntos difusos se deberán relacionar mediante el producto cartesiano. El producto cartesiano equivale a obtener la intersección de conjuntos difusos dados.

producto, las operaciones entre conjuntos y los operadores definidos anteriormente también pueden ser aplicadas a ellas. Supongamos $R(x, y)$ y $S(x, y)$ dos relaciones en el mismo espacio producto $U \times V$. La unión o intersección entre R y S, que son composiciones entre las dos relaciones, se definen como $\mu_{R\cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$ y $\mu_{R\cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) \wedge \mu_S(x, y)$, respectivamente.

Si consideramos las relaciones difusas R y S que pertenecen a diferentes espacios producto, $R \subseteq U \times V$, $S \subseteq U \times W$, definimos a la composición como la relación difusa $R \circ S \subseteq U \times W$, definida por $\mu_{R\circ S}(x, z) = \vee_{y \in V}(\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$, con $z \in W$. Esta ley de composición es conocida como la composición MAX-MIN, y es a la que nos referiremos en este trabajo.

La definición anterior puede ser interpretada en la siguiente forma: $\mu_{R\circ S}(x, z)$ es la fuerza de un conjunto de cadenas que ligan x a z. Cada cadena tiene la forma $x \rightarrow y \rightarrow z$. La fuerza de tal cadena es la de su eslabón más débil. La intensidad de la relación entre x y z es aquella de la cadena más fuerte entre x y z.

Modelos basados en reglas difusas o fuzzy

En los sistemas basados en reglas difusas, las relaciones entre las variables se representan por medio de reglas difusas SI-ENTONCES de la siguiente forma general:

SI *proposición antecedente* **ENTONCES** *proposición consecuente*

La proposición antecedente es siempre una proposición difusa de los tipos "x es A" donde x es una variable lingüística y A es un término o constante lingüística. Valor de verdad de la proposición (un número real entre cero y uno) depende del grado de correspondencia (similitud) entre x y A. En este trabajo nos centraremos en modelos difusos lingüísticos[4] donde tanto el antecedente como en consecuente son proposiciones difusas.

El modelo difuso lingüístico se ha introducido como una manera de capturar el conocimiento semi-cualitativo disponible en la forma de reglas SI-ENTONCES:

SI x es A_i, ENTONCES y es B_i $i = 1, 2, \ldots, k$

Aquí x es la variable lingüística de entrada (antecedente), y A_i, son los términos lingüísticos antecedentes. De manera parecida, y es la salida variable lingüística (consecuente) y B_i, son los términos lingüísticos consecuentes. Los valores de x (y) y los términos lingüísticos, A_i (B_i) son conjuntos difusos definidos en los ámbitos de sus respectivas variables de base: $x \in X \subset R$ e $y \in Y \subset R$.

Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos del antecedente (consecuente) responden a las asignaciones: $\mu(x)$: $X \rightarrow [0,1]$, $\mu(y)$: $Y \rightarrow [0,1]$. Los conjuntos difusos A_i, definen regiones difusas en el espacio antecedente, que se corresponde con el respectivo espacio consecuente.

Los términos lingüísticos A_i, y B_i, por lo general, se seleccionan entre conjuntos de términos predefinidos, como *pequeño*, *mediano*, *etc*. Para denotar estos conjuntos de A y B, respectivamente, tenemos $A_i \in$ A y $B_i \in$ B. La base de reglas $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ y los conjuntos A y B constituyen la base de conocimientos del modelo lingüístico.

Representación relacional de un modelo lingüístico y su mecanismo de inferencia

El Modus Ponens en reglas de la Lógica Clásica indica que podemos inferir la

[4] El otro tipo de modelos es el de Takagi-Sugeno (TS) donde el antecedente es una proposición borrosa pero el consecuente es una función nítida (crisp).

verdad de la proposición B basados en la verdad de A y en la implicación $A \to B$:

premisa (regla) {	SI x es A ENTONCES y es B
dato	x es A
conclusión	y es B

La Lógica Difusa provee las bases de lo que se llama Razonamiento Aproximado, esto es, un modo de razonamiento en el que los valores verdaderos y las reglas de inferencia son difusos en vez de precisas. Informalmente, por razonamiento aproximado se entiende al proceso o los procesos por el cual una conclusión imprecisa es deducida a partir de una colección de premisas imprecisas. Se puede decir que, en un sentido amplio, la lógica difusa es la lógica del razonamiento aproximado. De muchas maneras, el razonamiento aproximado es análogo al razonamiento utilizado por los seres humanos en situaciones mal definidas o no cuantificables.

El proceso de Razonamiento Aproximado utiliza el Modus Ponens Generalizado:

premisa (i-ésima regla) {	*SI x es* A_i *ENTONCES y es* B_i
dato	x es A'
conclusión	y es B'

donde A' y B' son modificaciones de A y B, respectivamente, e, $i = 1, 2, \ldots, k$ reglas disparadas por los valores del espacio entrada.

Supongamos que A_i, $A' \subseteq X$, B_i, $B' \subseteq Y$ y asumiendo que la implicación $A \to B$ se expresa como una relación difusa R en el espacio producto $X \times Y$, el conjunto difuso del espacio salida inducido por x es A' y la regla difusa "SI x es A ENTONCES y es B" se define como:

$$\mu_{B'}(y) = \max_X \left[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)\right]$$

En base a la ley de composición MAX-MIN, tenemos que

$$\mu_R(x,y) = \max_{1 \le i \le k} \left\lfloor \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{Bi}(y) \right\rfloor,$$

por lo tanto, considerando la implicación de Mamdami, resulta:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{1 \le i \le k} \left\{ \max_X \left\lfloor \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{Ai}(x) \right\rfloor \wedge \mu_{Bi}(y) \right\}$$

Denotamos $\beta_i = \max_X \left\lfloor \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{Ai}(x) \right\rfloor$ el

el grado de cumplimiento de la i-ésima regla antecedente.

El conjunto difuso de salida del modelo lingüístico es, por lo tanto:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{1 \le i \le k} \left\lfloor \beta_i \wedge \mu_{Bi}(y) \right\rfloor, \text{ con } y \in Y.$$

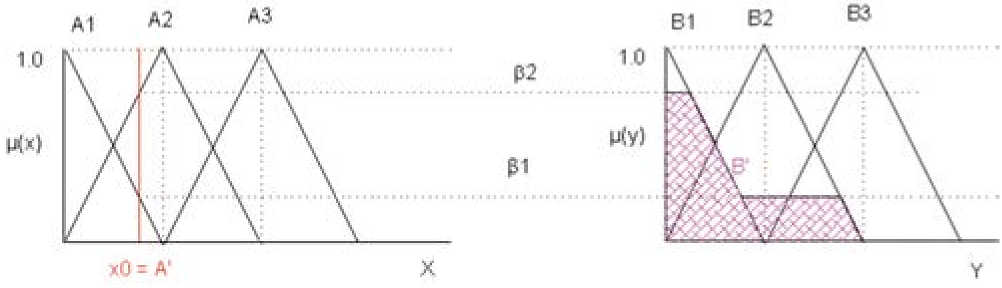
Todo el algoritmo o mecanismo de inferencia, llamado MAX-MIN o Mamdami, se resume y se visualiza a continuación:

Base de reglas difusas	**Entrada**	**Implicación y salida**
SI x es A_1 ENTONCES y es B_1 SI x es A_2 ENTONCES y es B_2 SI x es A_3 ENTONCES y es B_3	x es A' siendo A' una singularidad difusa (fuzzy single ton)*	x es $A' \to y$ es B'

* Un conjunto difuso que contiene un solo elemento es denominado una singularidad difusa o fuzzy singleton.

Algoritmo:

1. Cálculo del grado de cumplimiento de $\beta_i = \max \lfloor \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A'}(x) \rfloor, 1 \le i \le k$. Nótese que para un conjunto difuso unitario ($\mu_{A'}(x) = 1$ para $x = x_0$ y $\mu_{A'}(x) = 0$ en otro caso) la ecuación para β_i se simplifica a $\beta_i = \mu_{Ai}(x_0)$.
2. Derivación de los conjuntos de salida de la i-ésima regla disparada B_i': $\mu_{B_i'}(y) = \beta_i \wedge \mu_{Bi}(y)$, $y \in Y$, $1 \le i \le k$.
3. Determinación del conjunto difuso de salida B': $\mu_{B'}(y) = \max_{1 \le i \le k} \mu_{B_i'}(y)$, $y \in Y$.



Representación esquemática del
mecanismo de inferencia de Mamdani

Defuzzificación

El propósito de defuzzificación es convertir cada conclusión obtenida por el mecanismo de inferencia, la cual es expresada en términos de un conjunto difuso (o varios conjuntos difusos), a un simple número real.

Con el esquema de inferencia Mamdani, se utiliza el método de defuzzificación del centroide o centro de gravedad porque arroja un resultado coherente con la situación problemática a resolver y, a la vez, implica una relativa simplicidad en el cálculo.

Este método calcula las coordenadas *y* del centro de gravedad del área bajo el conjunto difuso *B'*:

$$y' = centroide(B') = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mu_{B'}(y) \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{m} \mu_{B'}(y)}$$

donde m es el número de elementos y_j en Y.

Procedimiento de Valoración de Edificaciones

De todos los procedimientos de valoración de edificaciones que existen, el más aplicado es el que se basa en el valor de la unidad superficial ya que permite, de modo simple, obtener el valor de la edificación multiplicando su superficie construida por el mencionado valor unitario. La legislación catastral vigente, Ley Nº 3.483, define al valor de la unidad superficial construida como el costo de reproducción depreciado (CRD) y las Normas Técnicas de Valoración (Resoluciones DGCeIT 100/06 y 100/08) establecen que dicho costo por metro cuadrado resulta de la ponderación de la calidad constructiva o categorización edilicia (sistema de puntos) y de la depreciación por antigüedad y estado de conservación. Esta información base es obtenida mediante relevamientos que lleva adelante el organismo catastral.

En los últimos veinte años se ha acentuado una tendencia que orienta el empleo de técnicas de relevamiento que evitan el ingreso a la edificación; si bien surge como una respuesta a una necesidad de satisfacer demandas de la sociedad (seguridad, molestias, etc.), ha encontrado en razones como disminución de costos operativos, reducción del tiempo de relevamiento y factibilidad de complemento con las técnicas aerofotogramétricas y de imágenes satelitales, entre otros, una adhesión cada vez más fuerte por parte de los organismos catastrales. El Catastro de Río Negro tiene previsto desarrollar un relevamiento expeditivo de mejoras urbanas, cuyo principal objetivo es verificar y completar la información resultante de los procesos de restitución fotogramétrica y de imágenes, relevando las características edilicias (calidad constructiva, antigüedad y estado de conservación) y consignando el destino de las mejoras del inmueble desde la vía pública, esto es, sin ingresar a la edificación.

Objeto del Estudio

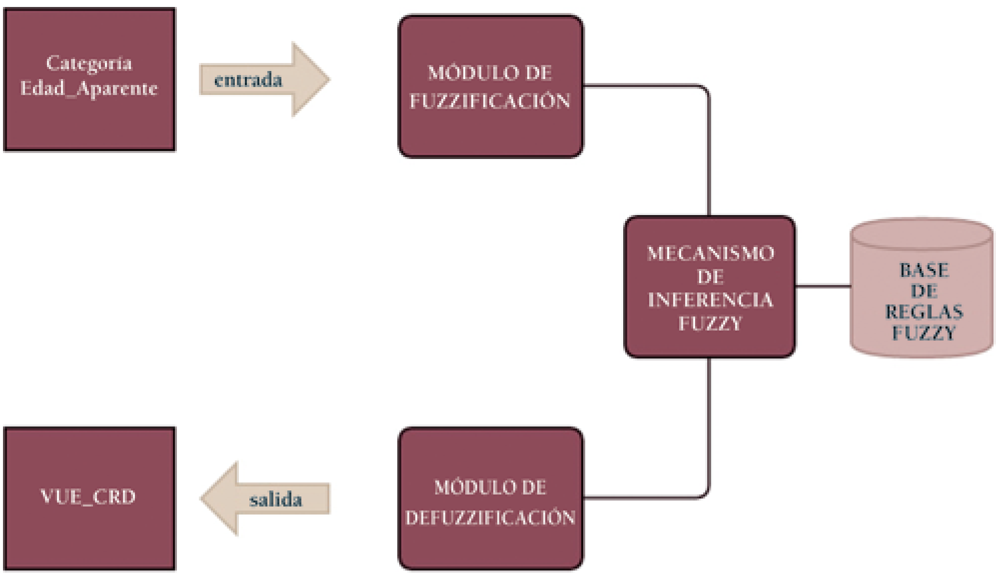
El relevamiento expeditivo implica una serie de limitaciones que necesariamente debe reflejarse en la planilla respectiva que utilizan los inspectores catastrales. La construcción de planillas con un número significativamente menor de características a tener en cuenta y el aumento del grado de incertidumbre en datos como la edad o el estado de conservación plantea un nuevo desafío: el desarrollo de un modelo de valoración catastral que pueda manejar diferentes tipos de incertidumbre inherente a casi todos los datos o elementos de valor de las mejoras edilicias.

En consecuencia, el objetivo del presente trabajo consiste en el desarrollo de un modelo difuso lingüístico para definir el valor catastral de la unidad superficial de una edificación VUE destinada a vivienda según el Costo de Reproducción Depreciado CRD, a partir de la consideración de los elementos de valoración Categoría Edilicia y Edad Aparente de la edificación, basado en alguna de las formas del razonamiento aproximado.

Modelo Difuso Propuesto

El modelo difuso propuesto consiste en cuatro módulos: una base de reglas difusas, un mecanismo de inferencia difusa, y los módulos de fuzzificación y defuzzificación (Figura 1).

Figura 1



Identificación de las variables lingüísticas del espacio entrada y salida

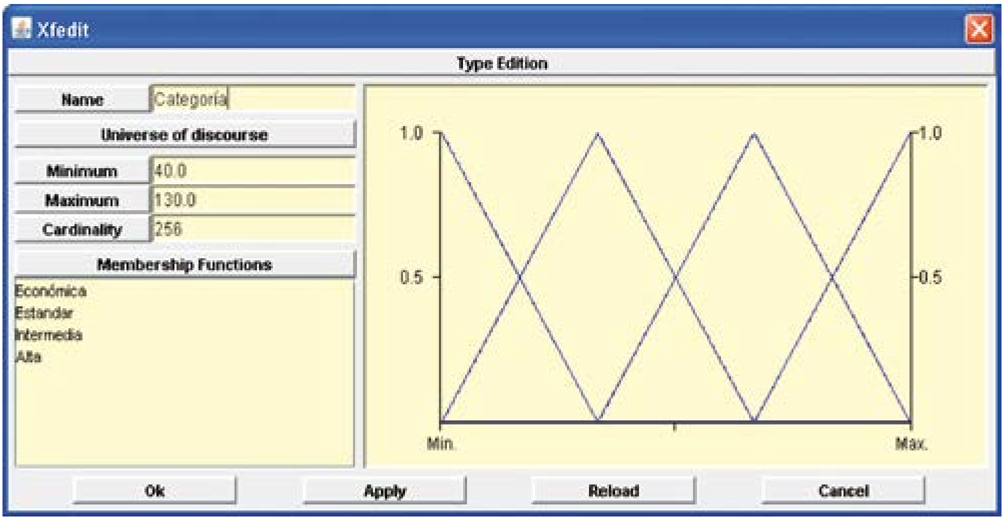
Se procedió a la identificación las variables relevantes de entrada y salida del sistema y los rangos de valores. Luego, se seleccionaron las restricciones lingüísticas para cada variable y se expresaron a través de apropiados conjuntos difusos.

Definición de las variables lingüísticas:

Variable Lingüística (1) – *Categoría*
T(Categoría)= Económica + Estandar + Intermedia + Alta
Universo del Discurso X = [0,130] Variable base: Puntaje x
Económica = (40,70) *Estandar* = (40,70,100) *Intermedia* = (70,100,130) *Alta* = (100,130)

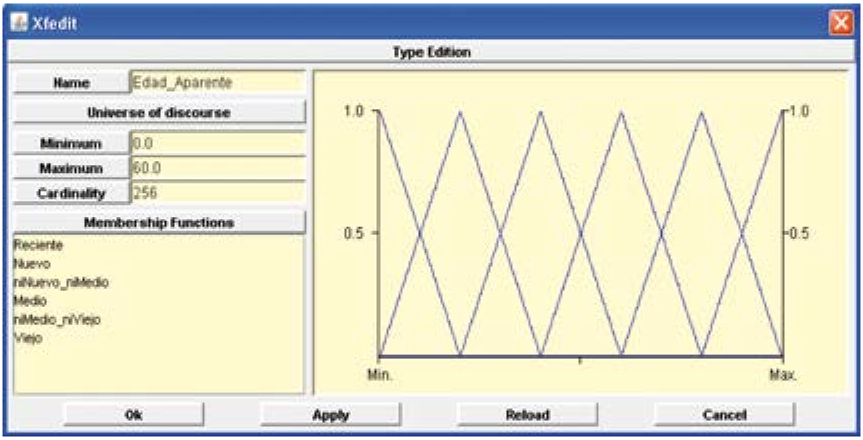
Dado que, por un tiempo prolongado, coexistirán en el Catastro las planillas que surgen de los dos tipos de relevamiento, el expeditivo y el tradicional, una de los condicionamientos de este trabajo lo constituye el sistema de puntos y los valores de puntaje adoptado por Catastro especificados en la Resolución Nº 100/06. De ahí que el universo del discurso se ajuste al rango de puntajes establecido por dicha resolución. Este sistema se basa en la cuantificación de la incidencia de cada uno de los rubros e ítems constructivos contemplados en la planillas de relevamiento de mejoras sobre el total del prototipo; tal incidencia se expresa como un índice numérico porcentual, el cual asociado al rango X definido en función de la relación de los costos de los prototipos considerados, se traduce en un puntaje representativo de la categorización edilicia.

Es claro que la eficiencia en el grado de compatibilidad entre los modelos de valoración vigente y propuesto descansa en la compatibilidad que se logre en la construcción de la planilla que se utilizará en el relevamiento expeditivo con respecto a los resultados que se obtienen desde la planilla del relevamiento tradicional.



Variable Lingüística (2) – *Edad Aparente*
T(Edad_Aparente) = *Reciente* + *Nuevo* + *niNuevo_niMedio* + *Medio* + *niMedio_niViejo* + *Viejo*
Universo del Discurso Y = [0,60] Variable base: Edad de la edificación y (años)
Reciente = (0,12) *Nuevo* = (0,12,24) *niNue_niMedio* = (12,24,36) *Medio* = (24,36,48) *niMedio_niViejo* = (36,48,60) *Viejo* = (48,60)

Lo "Aparente" se incorpora porque esta variable engloba los dos factores de depreciación edilicia que contempla la legislación catastral, esto es, la edad y el estado de conservación. De todos modos, es necesario distinguir las diferentes fuentes de donde pueden extraerse estos dos factores; es claro que el estado de conservación es apreciado por el inspector catastral pero, en el caso de la edad, la misma puede obtenerse de diversas fuentes, cada una de ellas con un grado de incertidumbre o imprecisión propio. Esta diversidad va desde la certificación de "Final de Obra" expedido por el Municipio (fecha de habilitación cierta) hasta la estimación del inspector actuante. Otra fuente de imprecisión está dada por aquellas construcciones que constan de distintas partes con diferentes edades; en este caso, la mayoría de los organismos catastrales del país han adoptado el criterio de tomar la edad que corresponde a la mayor superficie. Con este criterio se tiene un grado de generalidad que favorece la tarea de relevamiento pero, a su vez, agrega imprecisión al dato.



Variable Lingüística (3) – *VUE_CRD*
T(VUE_CRD) = *muyBajo* + *Bajo* + *niBajo_niMedio* + *Medio* + *niMedio_niAlto* + *Alto* + *muyAlto*
Universo del Discurso Z = [500,6.500] Variable base: Valor de la unidad superficial z (\$m^2)
muyBajo = (500,1500) *Bajo* = (500,1500,2500) *niBajo_niMedio* = (1500,2500,3500) *Medio* = (2500,3500,4500) *niMedio_niAlto* = (3500,4500,5500) *Alto* = (4500,5500,6500) *muyAlto* = (5500,6500)

Para la definición de los términos lingüísticos y el universo del discurso se recopilaron prototipos y modelos constructivos elaborados y difundidos por publicaciones técnicas específicas y por asociaciones de profesionales de la construcción. En base a las descripciones de cada prototipo, se confeccionó la planilla de relevamiento y se asoció a cada puntaje obtenido, el costo respectivo, para lo cual se consideró el período junio-agosto 2013.

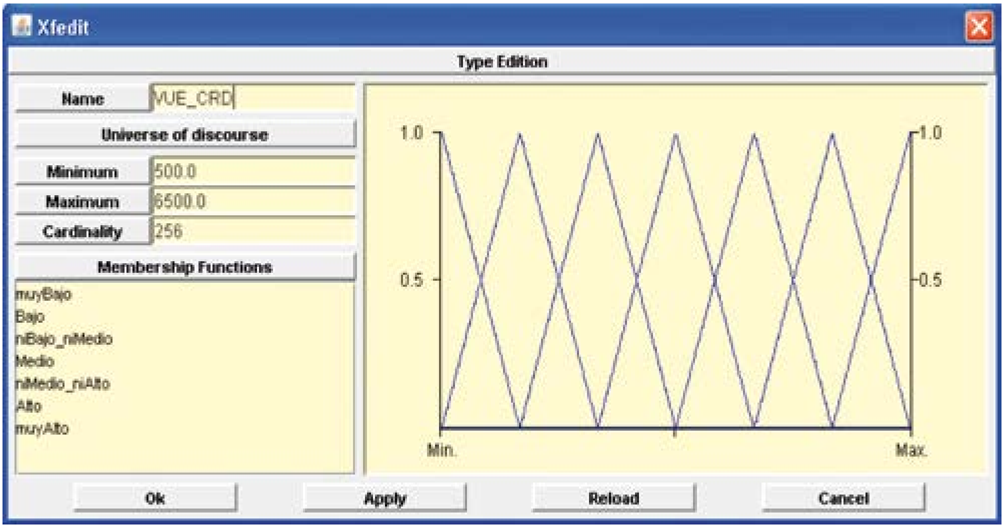
A continuación se detallan las fuentes y prototipos seleccionados (Tabla 1).

Los términos de transición de la variable lingüística *VUE_CRD*:

La preexistencia del universo del discurso de la variable lingüística *Categoría* y la necesidad de respetar los cientos de miles de relevamientos que obran en el organismo catastral, por un lado, y el dimensionamiento del universo del discurso de la variable *VUE_CRD*, por el otro, presentaron algún grado de incompatibilidad al momento de dar una respuesta eficaz a las distintas combinaciones del espacio de entrada con la variable del espacio salida.

Tabla 1

Fuente	Prototipo o modelo constructivo de vivienda
Reporte Inmobiliario http://www.reporteinmobiliario.com	Unifamiliar en planta baja
	Residencial en country
	Económica unifamiliar (Plan PRO.CRE.AR)
	Residencial en altura
Instituto Nacional de Estadísticas y Censos	Modelo 1: Multifamiliar en torre
INDEC – Ministerio de Economía de la Nación	Modelo 6: Unifamiliar en una planta
Revista VIVIENDA	Modelo Uno
Revista EL CONSTRUCTOR	Unifamiliar Económica
Consejo Profesional de Arquitectos, Agrimensores e Ingenieros	Tipo FO.NA.VI (Estándar)
	Dos plantas
	Edificio de departamentos

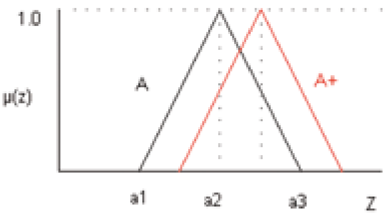


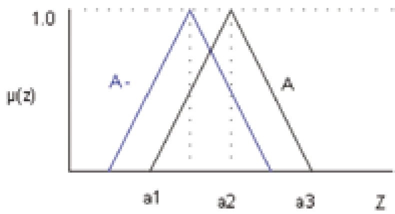
Esto llevó a la generación de "términos o restricciones lingüísticas de transición" de la variable *VUE_CRD*.

Los términos o restricciones de transición son subconjuntos difusos que se definen a partir del desplazamiento lateral del subconjunto difuso correspondiente al término lingüístico de referencia; para ello, se recurre al concepto de la distancia a la derecha del conjunto difuso $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $r = a_3$, en adelante la distancia D, que se define de la siguiente manera:

$$D(A, a_3) = a_3 - \frac{a_2 + a_3}{2}$$

Luego, si el desplazamiento es hacia la derecha tendremos el subconjunto difuso $A+ = (a_1 + D, a_2 + D, a_3 + D)$. Análogamente, si el desplazamiento es hacia la izquierda, se tendrá $A- = (a_1 - D, a_2 - D, a_3 - D)$.





Términos de transición de la variable lingüistiva *VUE_CRD*	
1. *Alto + (A+)*	Referencia: *Alto(A)* = (4500,5500,6500)
D(A,6500) = 500	*Alto+* = (5000,6000,6500)
Obsérvese que el conjunto difuso *Alto+* excede el Universo del Discurso *Z* por lo que queda truncado en 6500.	
2. *niMedio_niAlto – (M/A–)*	Referencia: *niMedio_niAlto(M / A)* = (3500,4500,5500)
D(M/A,5500) = 500	*niMedio_niAlto – (M/A–)* = (3000,4000,5000)
3. *Medio –(M–)*	Referencia: *Medio(M)* = (2500,3500,4500)
D(M,4500) =500	*Medio – (M–)* = (2000,3000,4000)
4. *Bajo – (B–)*	Referencia: *Bajo(B)* = (500,1500,2500)
D(B,2500) = 500	*Bajo – (B–)* = (500,1000,2000)
Obsérvese que el conjunto difuso *Bajo–* excede el Universo del Discurso *Z* por lo que queda truncado en 500.	
5. *muyBajo – (mB–)*	Referencia. *muyBajo(mB)* = (500,1500)
D(mB,1500) = 500	*muyBajo – (mB–)* = (500,1000)
Obsérvese que el conjunto difuso *muyBajo–* excede el Universo del Discurso *Z* y queda truncado en 500.	

Base de reglas difusas

El conocimiento del problema de valoración se formula en un conjunto finito de reglas difusas aptas para reproducir el comportamiento de entrada y salida del sistema, con base apenas en un conjunto de datos compuesto por vectores de entrada y salida.

La derivación de la base de reglas difusas incluye la definición de su número y de su composición (conocimiento especializado) y el posterior refinamiento para la construcción de la base final.

El número de reglas surge, simplemente, del producto del número de términos lingüísticos de las variables del espacio entrada, esto es,

$$N.R. = N_{Categoria}(4) \cdot N_{Edad\_Aparente}(6) = 24.$$

La composición de la base de reglas difusas resume el conocimiento especializado, es decir, el conocimiento que surge de la opinión de expertos, los que, en este caso, son los profesionales y agentes que intervienen en el mercado inmobiliario y de la construcción y los técnicos y profesionales del Catastro. Este conocimiento se resume, en los términos del modelo propuesto (Tabla 2).

La base definitiva de reglas de inferencia difusa del modelo es la tabla 3.

Tabla 2

Puntaje (calidad constructiva de la edificación)	Valor unidad superficial de edificación recién construida	Valor con antigüedad y/o valor residual
130	6.500	valor residual > 2.000
120	6.000 / 6.300	valor residual < 2.000
110	5.700 / 5.800	valor residual > 1.000
100	5.500	valor (60 años) ≅ 1.000
90	5.000	valor (55 años) ≅ 1.000
80	4.500	valor (48 años) ≅ 1.000
70	4.000	valor (45 años) ≅ 1.000
60	3.500	valor (40 años) ≅ 1.000
50	3.000 / 3.300	valor (36 años) ≅ 1.000
40	2.500 / 3.000	valor residual = 500

Tabla 3
Base de reglas

BdeR Detallado						BdeR Sintético				
Categoría		Edad_Aparente		VUE_CRD						
Si	Alta	&	Reciente	entonces	muyAlto	Alt	&	Rec	=>	mA
Si	Alta	&	Nuevo	entonces	Alto +	Alt	&	Nue	=>	A+
Si	Alta	&	niNuevo_niMedio	entonces	Alto	Alt	&	Nue/Med	=>	A
Si	Alta	&	Medio	entonces	niMedio_niAlto	Alt	&	Med	=>	M/A
Si	Alta	&	niMedio_niViejo	entonces	Medio	Alt	&	Med/Vie	=>	M
Si	Alta	&	Viejo	entonces	niBajo_niMedio	Alt	&	Vie	=>	B/M

(Continúa)

Tabla 3
Base de reglas *(Continuación)*

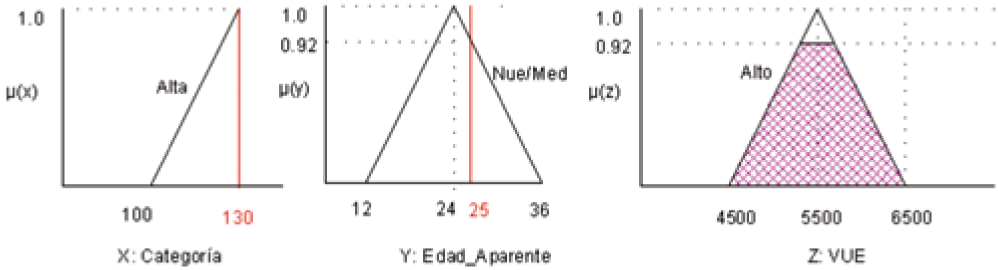
BdeR Detallado						BdeR Sintético				
Categoría		Edad_Aparente		VUE_CRD						
Si	Intermedio	&	Reciente	entonces	Alto	Int	&	Rec	=>	A
Si	Intermedio	&	Nuevo	entonces	niMedio_niAlto	Int	&	Nue	=>	M/A
Si	Intermedio	&	niNuevo_niMedio	entonces	Medio	Int	&	Nue/Med	=>	M
Si	Intermedio	&	Medio	entonces	niBajo_niMedio	Int	&	Med	=>	B/M
Si	Intermedio	&	niMedio_niViejo	entonces	Bajo	Int	&	Med/Vie	=>	B
Si	Intermedio	&	Viejo	entonces	Bajo -	Int	&	Vie	=>	B-
Si	Estándar	&	Reciente	entonces	niMedio_niAlto -	Est	&	Rec	=>	M/A-
Si	Estándar	&	Nuevo	entonces	Medio	Est	&	Nue	=>	M
Si	Estándar	&	niNuevo_niMedio	entonces	niBajo_niMedio	Est	&	Nue/Med	=>	B/M
Si	Estándar	&	Medio	entonces	Bajo	Est	&	Med	=>	B
Si	Estándar	&	niMedio_niViejo	entonces	Bajo -	Est	&	Med/Vie	=>	B-
Si	Estándar	&	Viejo	entonces	muyBajo	Est	&	Vie	=>	mB
Si	Económica	&	Reciente	entonces	Medio -	Eco	&	Rec	=>	M-
Si	Económica	&	Nuevo	entonces	niBajo_niMedio	Eco	&	Nue	=>	B/M
Si	Económica	&	niNuevo_niMedio	entonces	Bajo	Eco	&	Nue/Med	=>	B
Si	Económica	&	Medio	entonces	Bajo -	Eco	&	Med	=>	B-
Si	Económica	&	niMedio_niViejo	entonces	muyBajo	Eco	&	Med/Vie	=>	mB
Si	Económica	&	Viejo	entonces	muyBajo -	Eco	&	Vie	=>	mB-

Aplicación del modelo difuso de valoración

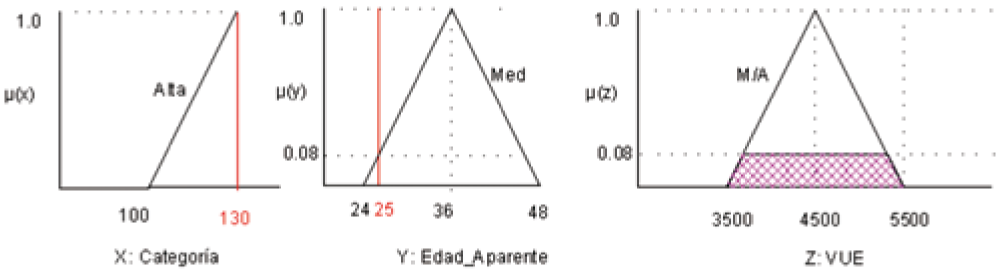
A continuación se detallan, de manera analítica y gráfica, tres casos de aplicación de las reglas de inferencia, sus conclusiones y valores defuzzificados:

— VUE para una categoría de 130 puntos y una edad aparente de 25 años

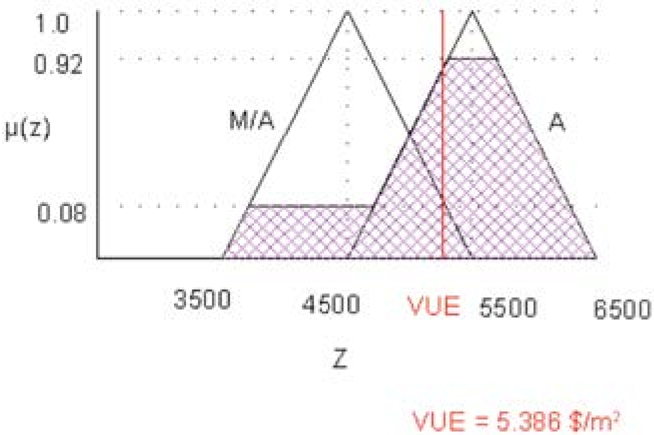
Variable base	Grado de pertenencia	Reglas de Inferencia
$x = 130$	$\mu_{Alt}(130) = 1.00$	Alta & niNuevo_niMedio $\Rightarrow$ Alto
$y = 25$	$\mu_{Nue/Med}(25) = 0.92$ $\mu_{Med}(25) = 0.08$	Alta & Medio $\Rightarrow$ niMedio_niAlto
Mecanismo de Inferencia		Valor defuzzificado
$\mu_C(z) = (0.92 \wedge \mu_A(z)) \vee (0.08 \wedge \mu_{M/A}(z))$		VUE = 5.386 \$/m^2



Regla: SI Categoría es Alta y Edad_Aparente es niNuevo_niMedio ENTONCES VUE es Alto



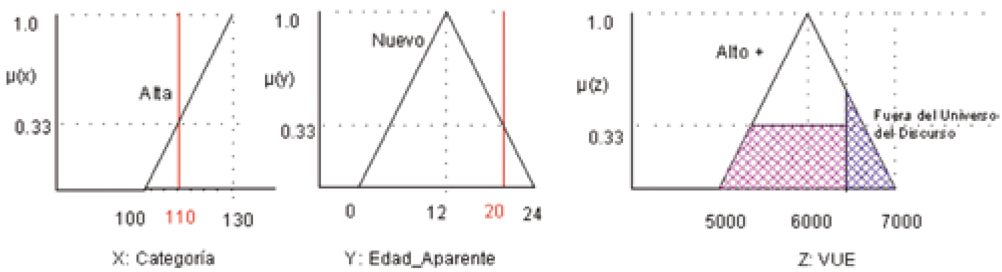
Regla: SI Categoría es Alta y Edad_Aparente es Medio ENTONCES VUE es niMedio_niAlto



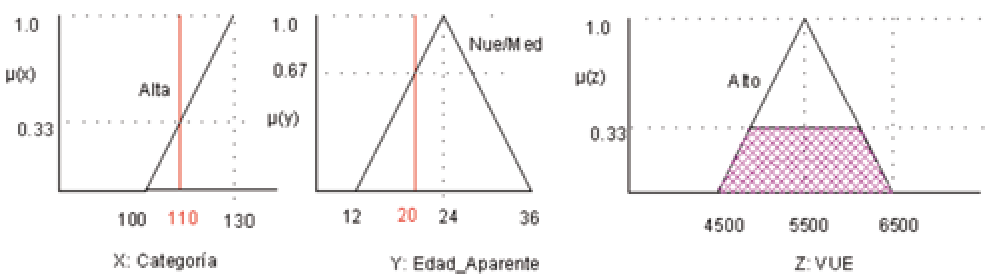
— VUE para una categoría de 110 puntos y una edad aparente de 20 años

Variable base	Grado de pertenencia	Reglas de Inferencia
$x = 110$	$\mu_{Alt}(110) = 0.33$	Alta & Nuevo $\Rightarrow$ Alto+
	$\mu_{Interm}(110) = 0.67$	Alta & niNuevo_niMedio $\Rightarrow$ Alto
$y = 20$	$\mu_{Nue}(20) = 0.33$	Intermedio & Nuevo $\Rightarrow$ niMedio_niAlto
	$\mu_{Nue/Med}(20) = 0.67$	Intermedio & niNuevo_niMedio $\Rightarrow$ Medio

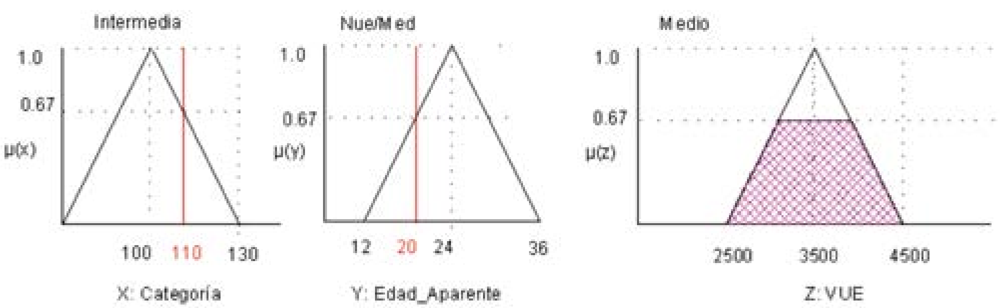
Mecanismo de Inferencia	Valor defuzzificado
$\mu_C(z) = (0.33 \wedge \mu_{A+}(z)) \vee (0.33 \wedge \mu_A(z)) \vee (0.33 \wedge \mu_{M/A}(z)) \vee (0.67 \wedge \mu_M(z))$	VUE = 4.514 $/m^2



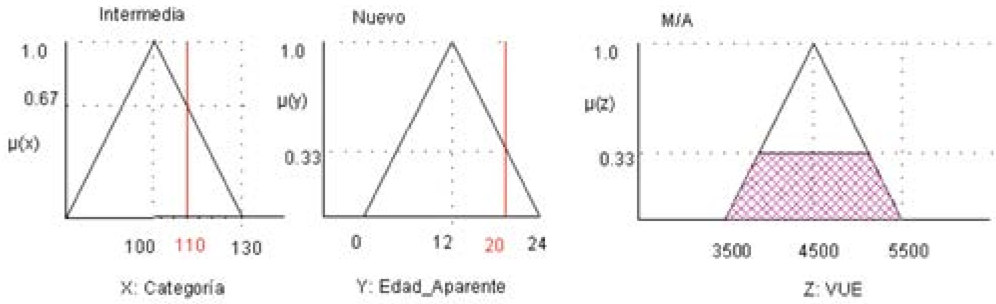
Regla: SI Categoría es Alta y Edad_Aparente es Nuevo ENTONCES VUE es Alto +



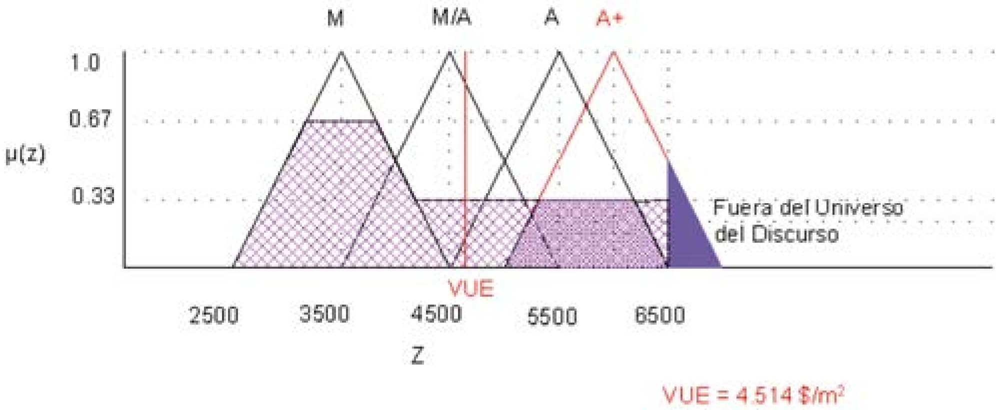
Regla: SI Categoría es Alta y Edad_Aparente es niNuevo_niMedio ENTONCES VUE es Alto



Regla: SI Categoría es Intermedia y Edad_Aparente es niNuevo_niMedio ENTONCES VUE es Medio

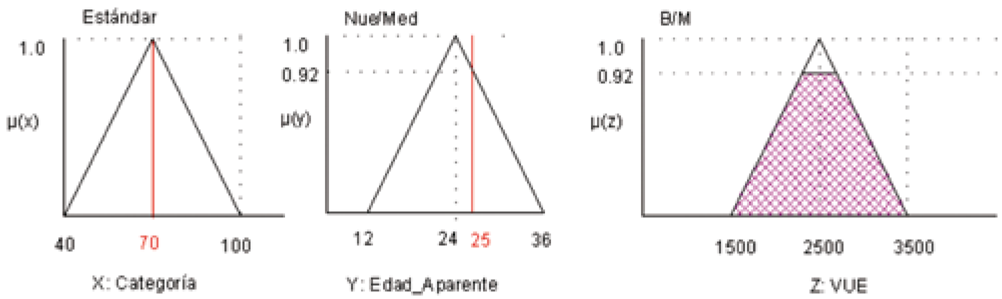


Regla: SI Categoría es Intermedia y Edad_Aparente es Nuevo ENTONCES VUE es niMedio_niAlto

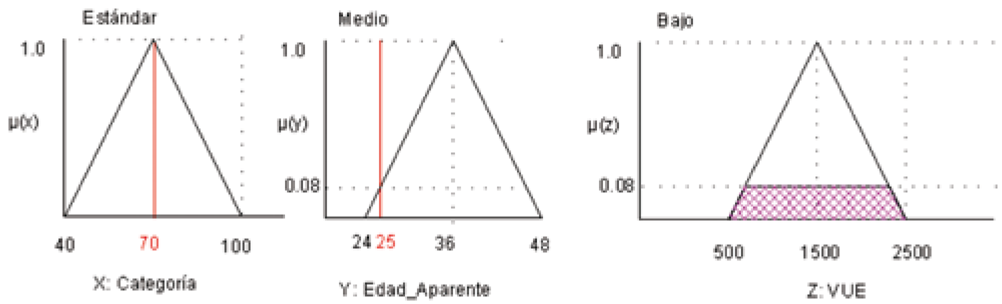


— VUE para una categoría de 70 puntos y una edad aparente de 25 años.

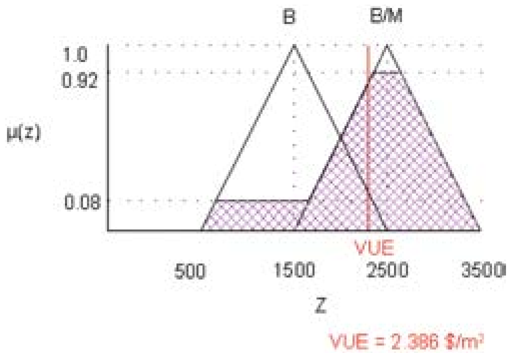
Variable base	Grado de pertenencia	Reglas de Inferencia
x = 70	$\mu_{Est}(70) = 1.00$	Estandar & niNuevo_niMedio ⇒ niBajo_niMedio
y = 25	$\mu_{Nue/Med}(25) = 0.92$	Estandar & Medio ⇒ Bajo
	$\mu_{Med}(25) = 0.08$	
Mecanismo de Inferencia		Valor defuzzificado
$\mu_C(z) = (0.92 \wedge \mu_{B/M}(z)) \vee (0.08 \wedge \mu_B(z))$		VUE = 2.386 $/m^2



Regla: SI Categoría es Estándar y Edad_Aparente es niNuevo_niMedio ENTONCES VUE es niBajo_niMedio



Regla: SI Categoría es Estándar y Edad_Aparente es Medio ENTONCES VUE es Bajo



Visualización del espacio salida del modelo: Matriz y Superficie de valor VUE_CRD

El modelo difuso de valoración nos permite aproximar una superficie definida por una malla de puntos que, inicialmente, son los que resultan de la matriz base de valoración.

El espacio de entrada está dado por las variables lingüísticas *Categoría* y *Edad_Aparente*, en adelante las variables x e y, y la salida esperada resulta de las distintas combinaciones o elementos de la matriz base, los valores *VUE_CRD* respectivos, en adelante la variable z. De esta manera, se aproxima una superficie de valor *VUE_CRD* como la expresión geométrica de la función $z = f(x, y)$ desconocida (Tabla 4).

Luego es posible densificar los puntos de la superficie de valor *VUE_CRD* a través de la interpolación por el método de los cuadrados mínimos.

Es muy importante el diseño de la malla de puntos o subregiones; esto es, en definitiva, la construcción de la matriz base, por cuanto debe garantizar un adecuado grado de suavidad de la función que torne viable el mecanismo de interpolación por cuadrados mínimos.

A su vez, es valioso que la construcción de la matriz base cuente con la ventaja de la economía de reglas, dado que la misma está asociada a la cantidad reducida de puntos de la malla y/o subregiones.

Finalizada la tarea de la densificación de puntos de la malla mediante la interpolación queda definida una Matriz Valor VUE $MVUE_{61\times91}(z_{ij})$ de 5.551 elementos, cuyo fragmento se muestra en la tabla 5.

Tabla 4
Matriz base de valoración

Edad (años)	Categoría (puntos)									
	130	120	110	100	90	80	70	60	50	40
0	6.500	6.003	5.776	5.500	5.114	4.531	4.000	3.614	3.386	3.000
5	6.135	5.582	5.109	5.046	4.497	4.305	3.790	3.309	3.239	2.790
10	6.067	5.565	4.991	4.726	4.317	4.147	3.543	3.170	2.975	2.585
12	6.000	5.505	4.967	4.500	4.114	3.886	3.500	3.114	2.886	2.500
15	5.870	5.170	4.842	4.188	3.741	3.559	3.188	2.741	2.559	2.188
20	5.637	5.014	4.514	3.886	3.500	3.287	2.886	2.500	2.210	1.886
24	5.500	4.840	4.160	3.500	3.114	2.886	2.500	2.114	1.886	1.500
25	5.386	4.626	4.040	3.386	2.963	2.752	2.386	2.047	1.836	1.477
30	5.000	4.137	3.863	3.000	2.490	2.458	2.000	1.720	1.602	1.250
35	4.614	3.960	3.374	2.614	2.248	2.037	1.614	1.478	1.295	1.040
36	4.500	3.840	3.160	2.500	2.114	1.886	1.500	1.363	1.274	1.000
40	4.114	3.423	2.898	2.114	1.859	1.687	1.363	1.190	1.111	946
45	3.802	3.122	2.648	1.813	1.640	1.482	1.125	1.106	993	915
48	3.500	2.840	2.160	1.500	1.363	1.165	1.000	946	935	833
50	3.274	2.584	2.077	1.443	1.250	1.081	986	905	851	753
55	2.947	2.259	1.696	1.210	1.075	1.052	849	783	748	639
60	2.500	1.859	1.396	1.100	946	935	833	639	581	500

Los elementos de la matriz base están expresados en Pesos por metro cuadrado.

Tabla 5
Matriz valor VUE

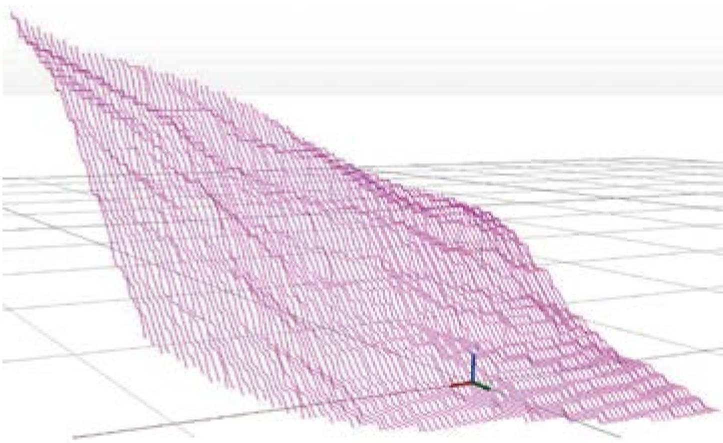
	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
0	3.000	3.193	3.386	3.500	3.614	3.807	4.000	4.266	4.531	4.823	5.114	5.307	5.500	5.638	5.776	5.890	6.003	6.252	6.500
1	2.987	3.180	3.313	3.445	3.595	3.788	3.987	4.252	4.458	4.738	5.008	5.216	5.273	5.468	5.734	5.848	5.898	6.146	6.477
2	2.974	3.141	3.294	3.431	3.576	3.731	3.974	4.213	4.410	4.717	4.885	5.125	5.160	5.425	5.693	5.753	5.793	6.067	6.454
3	2.948	3.073	3.257	3.396	3.538	3.634	3.948	4.138	4.376	4.648	4.762	5.018	5.103	5.344	5.609	5.636	5.687	6.005	6.409
4	2.895	3.044	3.248	3.335	3.462	3.601	3.895	4.093	4.319	4.524	4.638	4.895	5.074	5.211	5.443	5.469	5.635	5.932	6.318
5	2.790	3.015	3.239	3.274	3.309	3.550	3.790	4.048	4.305	4.401	4.497	4.772	5.046	5.078	5.109	5.346	5.582	5.859	6.135
6	2.777	3.002	3.223	3.258	3.300	3.541	3.775	4.032	4.295	4.369	4.486	4.752	5.026	5.058	5.102	5.322	5.574	5.855	6.131
7	2.764	2.963	3.206	3.224	3.292	3.515	3.759	3.986	4.285	4.338	4.475	4.692	5.006	5.020	5.094	5.298	5.569	5.852	6.127
8	2.739	2.886	3.173	3.184	3.274	3.455	3.728	3.908	4.266	4.304	4.452	4.594	4.966	4.979	5.080	5.285	5.567	5.843	6.118
9	2.688	2.833	3.107	3.118	3.240	3.406	3.667	3.877	4.226	4.268	4.407	4.558	4.886	4.904	5.050	5.281	5.566	5.830	6.101
10	2.585	2.780	2.975	3.073	3.170	3.357	3.543	3.845	4.147	4.232	4.317	4.522	4.726	4.859	4.991	5.278	5.565	5.816	6.067
11	2.543	2.738	2.931	3.028	3.142	3.329	3.522	3.824	4.017	4.102	4.216	4.409	4.613	4.746	4.979	5.266	5.535	5.786	6.034
12	2.500	2.693	2.886	3.000	3.114	3.307	3.500	3.693	3.886	4.000	4.114	4.307	4.500	4.734	4.967	5.236	5.505	5.753	6.000
13	2.344	2.589	2.804	2.891	3.021	3.183	3.393	3.589	3.770	3.891	4.002	4.190	4.344	4.630	4.905	5.194	5.421	5.641	5.968
14	2.266	2.483	2.723	2.774	2.928	3.069	3.266	3.483	3.641	3.774	3.878	4.089	4.266	4.557	4.873	5.118	5.338	5.563	5.935
15	2.188	2.374	2.559	2.650	2.741	2.965	3.188	3.374	3.559	3.650	3.741	3.965	4.188	4.515	4.842	5.006	5.170	5.520	5.870
16	2.169	2.313	2.537	2.580	2.681	2.916	3.169	3.313	3.491	3.596	3.726	3.927	4.169	4.455	4.822	4.940	5.160	5.489	5.812
17	2.150	2.253	2.515	2.527	2.651	2.868	3.150	3.253	3.457	3.541	3.711	3.889	4.150	4.394	4.801	4.875	5.151	5.458	5.783
18	2.113	2.201	2.472	2.494	2.636	2.825	3.113	3.206	3.440	3.499	3.628	3.789	4.113	4.344	4.760	4.826	5.131	5.419	5.768
19	2.037	2.157	2.385	2.430	2.621	2.787	3.037	3.172	3.423	3.469	3.621	3.741	4.037	4.303	4.678	4.795	5.092	5.372	5.754
20	1.886	2.048	2.210	2.355	2.500	2.693	2.886	3.087	3.287	3.394	3.500	3.693	3.886	4.200	4.514	4.764	5.014	5.326	5.637
21	1.838	1.952	2.170	2.274	2.452	2.597	2.838	2.990	3.237	3.293	3.452	3.645	3.838	4.104	4.470	4.676	4.992	5.282	5.620
22	1.789	1.855	2.129	2.193	2.404	2.500	2.790	2.894	3.187	3.211	3.404	3.500	3.790	4.007	4.426	4.587	4.971	5.239	5.603
23	1.693	1.774	2.048	2.097	2.307	2.404	2.693	2.793	3.087	3.113	3.307	3.404	3.693	3.919	4.337	4.544	4.927	5.204	5.569
24	1.500	1.693	1.886	2.000	2.114	2.307	2.500	2.693	2.886	3.000	3.114	3.307	3.500	3.830	4.160	4.500	4.840	5.170	5.500
25	1.477	1.657	1.836	1.942	2.047	2.217	2.386	2.569	2.752	2.858	2.963	3.175	3.386	3.713	4.040	4.333	4.626	5.006	5.386
26	1.463	1.611	1.821	1.895	2.027	2.151	2.362	2.492	2.734	2.799	2.933	3.126	3.362	3.636	4.029	4.298	4.595	4.908	5.362
27	1.449	1.566	1.807	1.848	2.006	2.086	2.338	2.415	2.715	2.740	2.904	3.078	3.338	3.559	4.018	4.262	4.565	4.810	5.338
28	1.420	1.520	1.778	1.792	1.965	2.014	2.290	2.347	2.564	2.663	2.845	2.934	3.290	3.502	3.996	4.196	4.504	4.723	5.290
29	1.364	1.473	1.719	1.726	1.884	1.937	2.193	2.288	2.506	2.569	2.727	2.840	3.193	3.467	3.952	4.098	4.382	4.646	5.193
30	1.250	1.426	1.602	1.661	1.720	1.860	2.000	2.229	2.458	2.474	2.490	2.745	3.000	3.432	3.863	4.000	4.137	4.569	5.000
31	1.237	1.400	1.583	1.623	1.705	1.830	1.976	2.181	2.371	2.421	2.475	2.668	2.976	3.383	3.832	3.939	4.126	4.546	4.976
32	1.224	1.374	1.564	1.584	1.690	1.800	1.952	2.133	2.302	2.369	2.460	2.591	2.952	3.335	3.802	3.878	4.115	4.524	4.952
33	1.198	1.290	1.525	1.533	1.660	1.700	1.904	1.994	2.233	2.314	2.430	2.528	2.904	3.190	3.741	3.786	4.093	4.441	4.904
34	1.145	1.229	1.449	1.466	1.599	1.623	1.807	1.910	2.134	2.191	2.369	2.479	2.807	3.092	3.619	3.702	4.049	4.364	4.807
35	1.040	1.168	1.295	1.387	1.478	1.546	1.614	1.826	2.037	2.143	2.248	2.431	2.614	2.994	3.374	3.667	3.960	4.287	4.614
36	1.000	1.137	1.274	1.319	1.363	1.432	1.500	1.693	1.886	2.000	2.114	2.307	2.500	2.830	3.160	3.500	3.840	4.170	4.500
37	993	1.124	1.254	1.278	1.341	1.388	1.483	1.659	1.861	1.950	2.082	2.243	2.452	2.734	3.127	3.435	3.788	4.066	4.452
38	987	1.110	1.233	1.237	1.320	1.345	1.466	1.625	1.836	1.901	2.050	2.114	2.404	2.637	3.095	3.369	3.736	3.962	4.404
39	973	1.069	1.193	1.201	1.277	1.311	1.432	1.575	1.787	1.837	1.987	2.050	2.307	2.572	3.029	3.265	3.632	3.865	4.307
40	946	1.029	1.111	1.151	1.190	1.277	1.363	1.525	1.687	1.773	1.859	1.987	2.114	2.506	2.898	3.161	3.423	3.769	4.114

(Continúa)

Tabla 5
Matriz valor VUE *(Continuación)*

	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
41	944	1.025	1.104	1.136	1.185	1.266	1.348	1.495	1.674	1.747	1.816	1.926	2.095	2.468	2.882	3.129	3.404	3.731	4.095
42	942	1.021	1.096	1.121	1.180	1.256	1.333	1.466	1.661	1.722	1.773	1.866	2.076	2.431	2.867	3.098	3.385	3.693	4.075
43	938	1.001	1.082	1.092	1.169	1.211	1.304	1.386	1.636	1.649	1.729	1.814	2.039	2.331	2.836	3.005	3.348	3.587	4.036
44	931	978	1.052	1.066	1.148	1.163	1.244	1.345	1.500	1.605	1.684	1.770	1.964	2.281	2.773	2.945	3.273	3.524	3.958
45	915	954	993	1.050	1.106	1.116	1.125	1.304	1.482	1.561	1.640	1.727	1.813	2.231	2.648	2.885	3.122	3.462	3.802
46	895	927	979	1.030	1.066	1.071	1.094	1.262	1.376	1.455	1.544	1.648	1.735	2.126	2.526	2.722	3.052	3.368	3.727
47	868	903	964	994	1.026	1.029	1.063	1.188	1.270	1.356	1.452	1.524	1.657	1.993	2.404	2.594	2.981	3.271	3.651
48	833	884	935	941	946	973	1.000	1.083	1.165	1.264	1.363	1.432	1.500	1.830	2.160	2.500	2.840	3.170	3.500
49	793	844	893	899	926	953	993	1.076	1.123	1.222	1.307	1.403	1.472	1.802	2.119	2.459	2.712	3.042	3.387
50	753	802	851	878	905	946	986	1.034	1.081	1.166	1.250	1.347	1.443	1.760	2.077	2.331	2.584	2.929	3.274
51	746	788	844	865	897	930	977	1.016	1.079	1.162	1.221	1.300	1.428	1.731	2.053	2.283	2.564	2.888	3.254
52	734	774	831	852	890	915	943	999	1.077	1.158	1.186	1.253	1.414	1.702	2.029	2.235	2.543	2.848	3.233
53	720	735	818	842	875	882	909	970	1.074	1.134	1.151	1.213	1.385	1.605	1.982	2.108	2.503	2.734	3.192
54	681	714	774	792	819	843	882	956	1.067	1.099	1.116	1.178	1.327	1.529	1.887	2.043	2.422	2.668	3.111
55	639	694	748	766	783	816	849	951	1.052	1.064	1.075	1.143	1.210	1.453	1.696	1.978	2.259	2.603	2.947
56	622	666	711	732	774	787	848	947	1.032	1.047	1.067	1.117	1.203	1.431	1.677	1.918	2.234	2.523	2.919
57	594	638	679	699	726	758	847	944	1.001	1.031	1.045	1.091	1.196	1.409	1.659	1.858	2.209	2.443	2.891
58	567	607	646	668	697	742	845	931	978	987	1.043	1.067	1.183	1.368	1.621	1.788	2.159	2.358	2.835
59	539	574	612	639	668	739	841	907	954	964	981	1.045	1.155	1.308	1.546	1.708	2.059	2.269	2.724
60	500	541	581	610	639	736	833	884	935	941	946	1.023	1.100	1.248	1.396	1.628	1.859	2.180	2.500

Superficie de valor VUE_CRD



X: *Categoría*; Y: *Edad _Aparente*; Z: *VUE_CRD.*

Conclusión

Parafraseando a Zadeh, la Lógica Difusa puede ser vista como un puente tendido sobre la amplia brecha que existe entre la precisión de la Lógica Clásica y la imprecisión dada, tanto por el mundo real como por su interpretación de parte de los seres humanos.

La Lógica Difusa, conjunta y complementariamente, con las Redes Neuronales se cuentan entre los denominados sistemas inteligentes, es decir, aquellos que poseen una habilidad asimilable a la del ser humano para resolver problemas dentro de un dominio específico, y capacidad para adaptarse, aprender en un ambiente cambiante y explicar como se toman las decisiones (o acciones). Los sistemas inteligentes se están consolidando como herramientas fundamentales para modelar sistemas complejos no lineales en campos de aplicación muy diversos, entre ellos y en los últimos años, la valoración catastral de inmuebles.

En este artículo se ha examinado la Teoría de Conjuntos Difusos para demostrar la aplicabilidad de la Lógica Difusa para expresar la imprecisión inherente a todo proceso de valoración catastral, haciendo el enfoque en un subsistema o segmento de dicho proceso como es la determinación del valor de la unidad superficial de viviendas. Se muestran técnicas difusas que permiten describir en términos lingüísticos el comportamiento de este subsistema de una forma mucho más cercana al lenguaje natural que otras representaciones matemáticas.

La experiencia acumulada en el desarrollo de este estudio permite destacar ventajas e inconvenientes, algunas de las cuales se enrolan en las generales para este tipo de modelos y otras son específicas de la aplicación. En términos generales podemos señalar, entre sus ventajas, que el modelo difuso de valoración se muestra robusto y tolerante a las imprecisiones y ruidos en los datos de entrada, dando buenos resultados en el marco de un proceso no lineal y de difícil modelación, y que no es necesario conocer el modelo matemático que rige su funcionamiento. Específicamente, este modelo proporciona una representación más transparente del subsistema de valoración de la unidad superficial de viviendas, la que se logra con una descripción de su funcionamiento por medio del lenguaje natural en la forma de reglas SI-ENTONCES, evitando la aplicación de coeficientes correctores o asimiladores y, también, en la visualización de los resultados a través de la matriz de valor. En cuanto a los inconvenientes o desventajas, este tipo de modelos no poseen la capacidad de aprender, esto es, son modelos sin memoria, por lo que requieren una permanente verificación y alimentación para mantenerlos actualizados; otro aspecto relevante lo constituye la determinación de las funciones de pertenencia y las reglas que no siempre son sencillas.

Los modelos difusos, en particular, y los sistemas inteligentes, en general, constituyen un nuevo paradigma que presenta una mayor capacidad para captar el razonamiento, la toma de decisiones y otros aspectos del conocimiento humano. El paso de los modelos tradicionales de valoración a este nuevo paradigma representa un desafío que, más temprano que tarde, los organismos catastrales deberán asumir definitivamente.

Bibliografía

Azcona, J. (2000): *Aplicación del razonamiento aproximado en la valuación catastral de edificios.* Trabajo final del Seminario de Posgrado 'Teoría y Lógica de los Conjuntos Difusos', Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

Bagnoli, C.; Smith, H. (1998): *The theory of fuzzy logic and its application to real estate valuation.* Journal of Rea Estate Research, vol. 16, Nro. 2, 169:199.

Bertoluzza, C.; Corral, N.; Salas, A. (1995): *On a new class of distances between fuzzy numbers.* Mathware & Soft Computing 2, 71:84.

Delgado, M.; Verdegay, J.; Vila, M. (1994): *Fuzzy numbers, definitions and properties*. Depto. Ciencias de la Computación, Univ. de Granada, España; Mathware & Soft Computing 1, 31:43.

Gallego Mora-Esperanza, J. (2008): *Modelos de valoración automatizada*. Gerencia Regional del Catastro de Madrid; Revista CT/Catastro.

Hajjari, T. (2012): *Ranking Indices for Fuzzy Numbers*. Dept. Mathematics, Islamic Azad University, Firoozkooh, Iran; Recurrent Neural Networks and Soft Computing, 49:72.

Herrera, L.; Pomares, H.; Rojas, I.; Gonzalez, J.; Valenzuela, O. (2004): *Function approximation through Fuzzy Systems using Taylor Series expansion-based rules: interpretability and parameter tuning*. Berlín.

Klir, George; YUAN, Bo (1995): *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications*. Edit. Prentice Hall P.T.R.; New Jersey, USA.

Mishra, A. (2010): *Design of fuzzy neural network for function approximation and classification*. IAENG Internacional Journal of Computer Science.

Murgel Filho, C.; Bernardo Filho, O.; DE SOUZA, F. (2004): *Avaliacaos en massa de imóveis com Lógica Nebulosa*. COBRAC 2004 – Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitario – UFSC Florianópolis, 10-14.

Yalpir, S.; Ozkan, G. (2011): *Fuzzy logic methodology and multiple regressions for residencial real-estates valuation in urbana areas*. Selcuk University, Geomatics Engineering, Turkey; Scientific Research and Essays Vol. 6, pp. 2431:2436.

Zadeh, L. (1965): Fuzzy Sets. Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley; Information and Control 8, 338:353.

Zadeh, L. (2004): *Fuzzy Logic Systems: origin, concepts and trenes*. University of California, Berkeley, USA.